

CONCOURS INTERNE D'INGENIEUR TERRITORIAL

SESSION 2013

Durée : 4 heures

Coefficient : 3

Mathématiques et physique appliquées

Les parties mathématiques et physiques seront composées sur des copies distinctes.

Les candidats peuvent traiter les questions dans l'ordre qui leur convient, mais en indiquant le numéro de chaque question.

Si le détail des calculs (justification des résultats) n'apparaît pas sur la copie, les questions qui requièrent des calculs ne seront pas corrigées.

À LIRE ATTENTIVEMENT AVANT DE TRAITER LE SUJET :

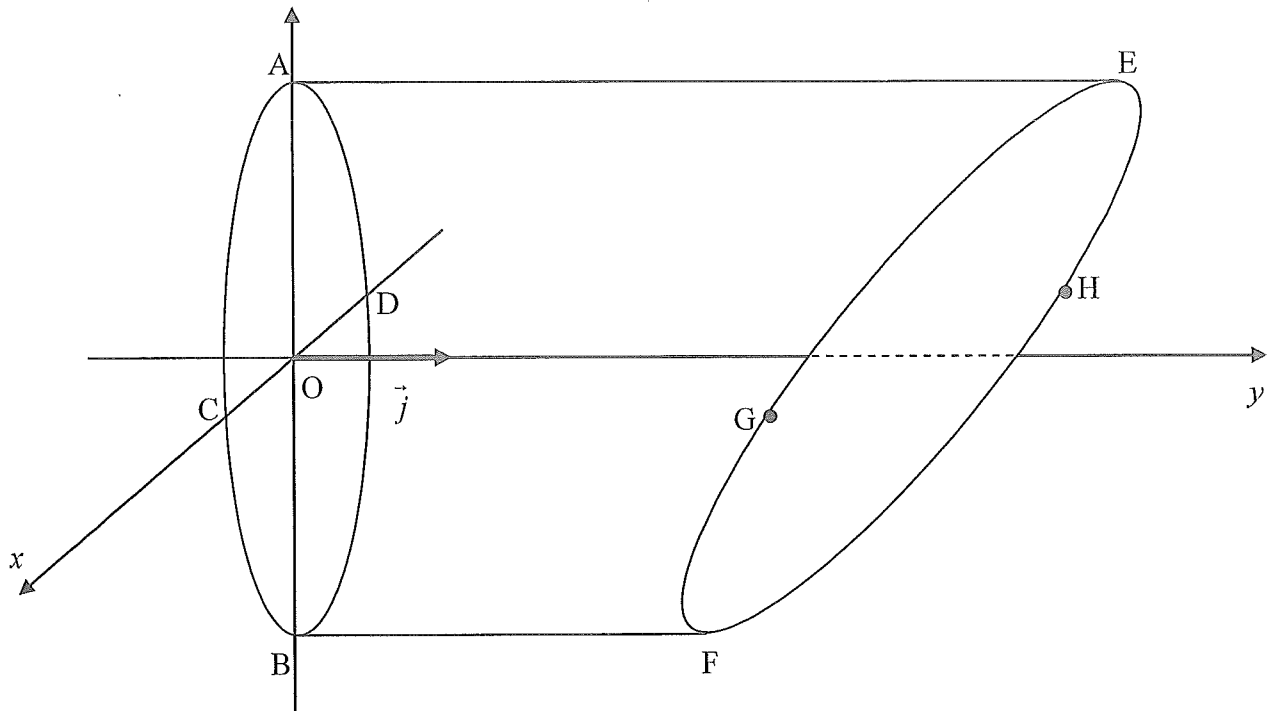
- Vous ne devez faire apparaître aucun signe distinctif dans votre copie, ni votre nom ou un nom fictif, ni signature ou paraphe, ni numéro de convocation.
- Seul l'usage d'un stylo soit noir, soit bleu est autorisé (bille, plume ou feutre). L'utilisation d'une autre couleur, pour écrire ou souligner, sera considérée comme un signe distinctif, de même que l'utilisation d'un surligneur.
- Le non-respect des règles ci-dessus peut entraîner l'annulation de la copie par le jury.
- Les feuilles de brouillon ne seront en aucun cas prises en compte.
- L'utilisation d'une calculatrice de fonctionnement autonome et sans imprimante est autorisée.

Les détails des calculs doivent figurer sur la copie
 Tout résultat non justifié sera considéré comme nul

MATHEMATIQUES : 10 points

PROBLEME 1 : (5 points)

Une société entreprend la réalisation de pièces métalliques de forme cylindrique dont on donne le schéma ci - dessous. (Ce dessin n'est pas à l'échelle.)



Ces pièces sont sectionnées à chaque extrémité selon les plans (ABC) et (EFG) .

On a choisi un repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ orthonormé direct tel que l'axe $(O; \vec{j})$ soit l'axe de révolution du cylindre.

On donne, dans ce repère les points :

- $A(0;0;2)$ • $B(0;0;-2)$ • $C(2;0;0)$ • $D(-2;0;0)$
- $E(0;9;2)$ • $F(0;7;-2)$ • $G(2;8;0)$ • $H(-2;8;0)$

Question 1 : (0,75 point)

Calculer les longueurs AB, AE et BF.

Question 2 : (0,75 point)

On pose $\vec{n} = \overrightarrow{EF} \wedge \overrightarrow{EG}$

- a) Calculer les coordonnées de ce vecteur.
- b) En déduire une équation cartésienne du plan (EFG)

Question 3 : (1,5 points)

Vérifier que le quadrilatère AEFB est un trapèze rectangle.

Soit K le projeté orthogonal de F sur $[AE]$.

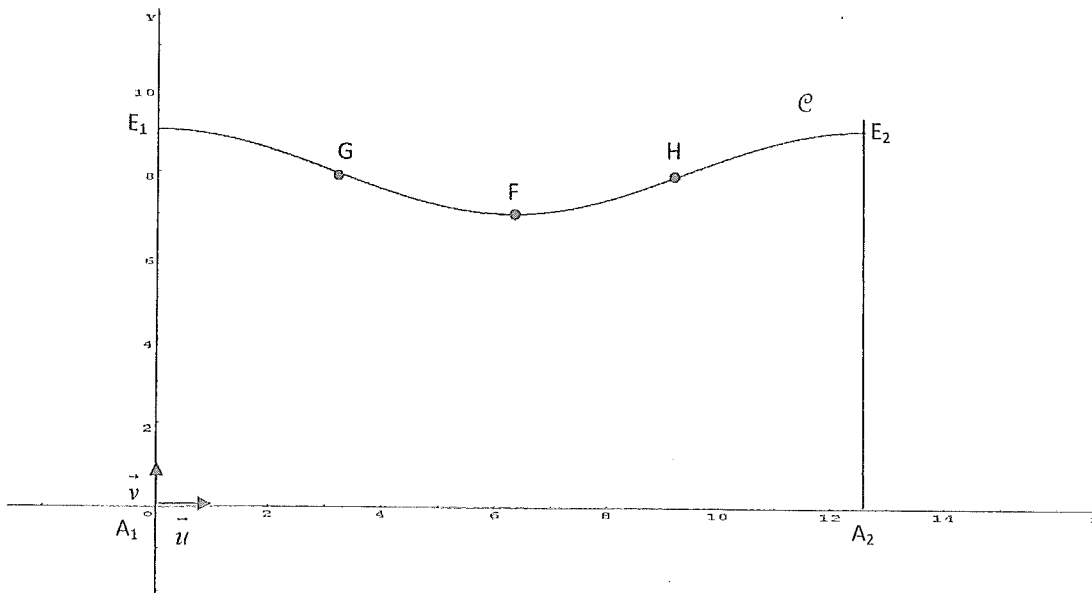
Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{FE}$, et en déduire à 0,1 degré près, une mesure de l'angle \widehat{KFE} .

Question 4 : (2 points)

On donne ci - dessous le développement de l'une des pièces métallique.

Le repère $(A_1; \vec{u}; \vec{v})$ est orthonormal d'unité 1 cm. (Le dessin n'est pas à l'échelle.)

On admet que, dans ce repère, la courbe \mathcal{C} obtenue a pour équation : $y = 8 + \cos \frac{x}{2}$.



a) Justifier que le segment $[A_1A_2]$ a pour longueur 4π .

b) Calculer l'aire en cm^2 de la surface métallique $A_1A_2E_2E_1$.

On donnera la valeur exacte, puis une valeur approchée au mm^2 près.

c) Retrouver cette aire par une autre méthode en utilisant les propriétés du cylindre.

PROBLEME 2 : (5 points)

On considère l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 muni de sa base canonique $B_0 = (e_1; e_2; e_3)$.

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base B_0 est la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Question 1 : (1 point)

Déterminer les valeurs propres de A , une base et la dimension de chaque sous - espace propre.

Question 2 : (0,5 point)

La matrice A est- elle inversible ? diagonalisable ?

(Justifier les réponses.)

Question 3 : (2 points)

On pose : $u_1 = e_1 - e_2$; $u_2 = f(e_2)$; $u_3 = f(e_3)$

a) Prouver que $B_1 = (u_1; u_2; u_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .

Écrire la matrice de passage P de la base B_0 à la base B_1 .

b) Vérifier que $P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

c) Démontrer les égalités :

$$\bullet f(u_1) = 0 \quad \bullet f(u_2) = u_2 + 2u_3 \quad \bullet f(u_3) = -u_2 - u_3$$

En déduire la matrice B de l'endomorphisme f dans la base B_1 .

d) Calculer B^2 , et en déduire B^{2n} pour tout entier naturel $n \geq 1$.

Question 4 : (0,5 point)

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $A^{2n} = P B^{2n} P^{-1}$.

Question 5 : (1 point)

En déduire l'expression de A^{2n} et de A^{2n+1} pour tout entier $n \geq 1$.

PROBLEME 1 : TRANSFERT DE CHALEUR (3 points)

Une pièce est séparée par un mur en brique, d'épaisseur 30 cm, dont l'extérieur est à (ZONE 2) - 4 °C, l'intérieur (ZONE1) à 13 °C

Question 1 : (1 point)

Calculer la résistance thermique totale de ce mur. En déduire le coefficient de transmission thermique K.

Question 2 : (1 point)

Calculer le flux thermique par mètre carré de surface. (1/3 points)

Question 3 : (1 point)

Calculer les températures de surface T_i et T_e

DONNEES :

Conductivité de la brique : $= 0,82 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$

Résistances thermiques superficielles :

Intérieure : $r_i = 0,14 \text{ m}^2.\text{K.W}^{-1}$ extérieure : $r_e = 0,08 \text{ m}^2.\text{K.W}^{-1}$

PROBLEME 2 : ELECTRICITE (4 points)

Une station de pompage est composée de 4 électropompes d'une puissance unitaire hydraulique de 450kW.

L'installation dispose également, pour les besoins auxiliaires, d'une distribution triphasée consommant une puissance active de 50 kW que l'on assimilera à une résistance.

Pour simplifier, on fera l'hypothèse qu'il s'agit d'un réseau équilibré sous un régime sinusoïdal parfaitement linéaire.

Question 1 : (1 point)

Calculer la puissance active, réactive consommée par une pompe.

Question 2 : (0,5 point)

Déterminer la puissance réactive consommée par l'installation auxiliaire.

Question 3 : (1 point)

Calculer la puissance totale active et réactive consommée par la station lors du fonctionnement des 4 pompes.

Question 4 : (1 point)

Calculer la capacité de la batterie de condensateurs à mettre en place afin de relever le $\cos \varphi$ à 0,9 pour les modes de couplage :

- Triangle
- Etoile

Question 5 : (0,5 point)

Quel type de couplage retenez-vous? Justifiez votre réponse.

DONNEES :

Alimentation de la station par Réseau Triphasé 230 V/ 400 V - 50 Hz

Électropompe entraînée par un moteur asynchrone :

Tension 400 V couplage Etoile $\cos \varphi$ 0,7 rendement 0,87

Pompe centrifuge rendement 0,6

PROBLEME 3 : HYDRAULIQUE (3 points)

Un tube en forme de U contenant du mercure (ρ_{Hg}) est relié à deux prises de pression d'un tube de venturi, afin de mesurer la vitesse à l'entrée d'une conduite d'eau potable.

Question 1 : (1,5 points)

Exprimer puis calculer la différence de pression entre le point A et C.

Question 2 : (1,5 points)

En déduire la vitesse V_a à l'entrée du Venturi.

DONNEES :

$$h = 200 \text{ mm}$$

$$H = 500 \text{ mm}$$

$$\text{Diamètre en A } D_A = 180 \text{ mm}$$

$$\text{Diamètre en C } D_C = 30 \text{ mm}$$

$$g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$$

$$\rho_{Hg} = 13600 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho_{eau} = 1000 \text{ kg/m}^3$$

