

## INGÉNIEUR TERRITORIAL

### CONCOURS INTERNE

SESSION 2015

#### ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE APPLIQUÉES

Durée : 4 heures

Coefficient : 3

**Les parties mathématiques et physique seront composées sur des copies distinctes.**

**Les candidats peuvent traiter les questions dans l'ordre qui leur convient, mais en indiquant le numéro de chaque question.**

**Si le détail des calculs (justification des résultats) n'apparaît pas sur la copie, les questions qui requièrent des calculs ne seront pas corrigées.**

#### **À LIRE ATTENTIVEMENT AVANT DE TRAITER LE SUJET :**

- ♦ Vous ne devez faire apparaître aucun signe distinctif dans votre copie, ni votre nom ou un nom fictif, ni votre numéro de convocation, ni signature ou paraphe.
- ♦ Aucune référence (nom de collectivité, nom de personne, ...) **autre que celles figurant le cas échéant sur le sujet ou dans le dossier** ne doit apparaître dans votre copie.
- ♦ Seul l'usage d'un stylo à encre soit noire, soit bleue est autorisé (bille non effaçable, plume ou feutre). L'utilisation d'une autre couleur, pour écrire ou pour souligner, sera considérée comme un signe distinctif, de même que l'utilisation d'un surligneur.
- ♦ Seules les représentations graphiques pourront être réalisées au crayon à papier.
- ♦ L'utilisation d'une calculatrice de fonctionnement autonome et sans imprimante est autorisée
- ♦ Le non-respect des règles ci-dessus peut entraîner l'annulation de la copie par le jury.
- ♦ Les feuilles de brouillon ne seront en aucun cas prises en compte.

**Ce sujet comprend 5 pages**

**Il appartient au candidat de vérifier que le document comprend le nombre de pages indiqué**

*S'il est incomplet, en avertir le surveillant*

Les détails des calculs doivent figurer sur la copie

Tout résultat non justifié sera considéré comme nul

**MATHÉMATIQUES : 10 points**

**PROBLÈME 1 (6 points)**

Soient  $a$  et  $b$  deux réels, on note :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{a,b} = \begin{pmatrix} b & b-a & b-a & 0 \\ b-a & b & b-a & 0 \\ b-a & b-a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \text{ et } u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- 1.a. - Calculer  $J^2$  (les calculs devront apparaître sur la copie).
- 1.b. - Montrer que  $M_{a,b} = aI + (b-a)J$ .
- 1.c. - En déduire une expression de  $M_{a,b}^2$  en fonction de  $I$  et  $J$ .
- 2.a. - Justifier que 0 est valeur propre de  $J$ .
- 2.b. - Déterminer une base du sous espace propre de  $J$  associé à la valeur propre 0 ; on le notera  $\text{SEP}(0, J)$ .
- 2.c. - Quelle est la dimension de  $\text{SEP}(0, J)$  ?
- 2.d. - Calculer  $J \cdot u$ .
- 2.e. - Déduire des questions précédentes que  $J$  est diagonalisable.
- 2.f. - Déterminer une matrice  $P$  de  $M_4(\mathbb{R})$  telle que  $P^{-1}JP$  soit diagonale (on précisera la valeur de  $P^{-1}JP$  mais le calcul de  $P^{-1}JP$  n'est pas demandé).
- 3.a. - Soit  $v$  un vecteur propre de  $J$ . Que vaut le produit  $I \cdot v$  ?  
Qu'en déduire pour  $v$  relativement à  $I$  ?
- 3.b. - En déduire que  $P^{-1}M_{a,b}P$  est diagonale et en préciser les éléments diagonaux.

**PROBLÈME 2 (4 points)**

Soit la fonction  $f$  la fonction définie pour tout réel  $x > 0$  par  $f(x) = \ln(x+1/x)$ .

1. - Déterminer les éventuelles limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.
2. - Déterminer  $f'(x)$  (le nombre dérivé de  $f$  en  $x$ ) pour tout réel  $x > 0$ . Déterminer l'éventuelle limite de  $f'$  en 0.
3. - Déterminer  $f''$  (la fonction dérivée seconde de  $f$ ).
4. - Déterminer, pour  $x$  réel, le signe de  $x^4 - 4x^2 - 1$ .  
En déduire le signe de  $f''$  puis les variations de  $f'$ .  
On pourra donner une valeur approchée de  $f'(x_0)$  pour un réel  $x_0$  bien choisi.
5. - Tracer sur la feuille de papier millimétré la représentation graphique de  $f$  sur l'intervalle  $]0 ; 2]$  (on prendra 8 cm comme unité graphique)

**PROBLÈME 1 : THERMODYNAMIQUE (4 points)**

Dans le cadre de la RT2012 (Règlementation Thermique) imposant pour les bâtiments neufs, une  $CEP_{max}$  (Consommation en Energie Primaire) de  $50kW.h/(m^2.an)$ , une collectivité opte pour le choix d'une installation d'une PAC (Pompe A Chaleur) pour le chauffage de sa nouvelle salle des fêtes.

Cette PAC fonctionne entre deux sources de chaleur : une rivière qui constitue la source froide et l'eau du circuit de chauffage qui constitue la source chaude.

Le fluide utilisé dans cette PAC sera de l'air assimilé à un gaz parfait (constante  $R=8,32 J/(K.mol)$ , capacité thermique molaire à pression constante  $C_p=29,1 J/(K.mol)$  ; rapport des capacités thermiques molaires à pression constante  $C_p$  et à volume constant  $C_v$  :  $\gamma = C_p/C_v = 1,4$ ).

Le fluide de la PAC décrit le cycle de transformations réversibles suivant :

- Passage de l'état ① à l'état ② par une compression adiabatique dans un compresseur :

Etat ① :      pression  $P_1=1,0.10^5 Pa$       volume  $V_1$       température  $T_1=298K$

Etat ② :      pression  $P_2=2,2.10^5 Pa$       volume  $V_2$       température  $T_2$

- Passage de l'état ② à l'état ③ par une transformation isobare pendant laquelle l'air reçoit de la source chaude une quantité de chaleur  $Q_1$  :

Etat ③ :      pression  $P_3 = P_2$       température  $T_3=340K$

- Passage de l'état ③ à l'état ④ par une détente adiabatique :

Etat ④ :      pression  $P_4 = P_1$       température  $T_4$

- Passage de l'état ④ à l'état ① par une transformation isobare pendant laquelle l'air reçoit de la source froide une quantité de chaleur  $Q_2$ .

On effectuera les calculs pour une mole d'air.

**Question 1**

Construire le diagramme de P,V (ou diagramme de Clapeyron), sans échelle particulière. Y placer les points ①②③et ④. Avons-nous affaire à un cycle moteur ou résistant (justifier graphiquement votre réponse).

Le graphique est a réaliser sur votre copie.

**Question 2**

Calculer les volumes  $V_1$  et  $V_2$ .

**Question 3**

Calculer les températures  $T_2$  et  $T_4$ .

**Question 4**

Pour chaque cycle décrit par une mole d'air, calculer :

- a. Les quantités de chaleur  $Q_1$  et  $Q_2$ .
- b. Le travail  $W$  reçu au cours de la totalité du cycle.

L'efficacité de la pompe, notée  $\epsilon$ , est le rapport de la quantité de chaleur reçue par la source chaude au cours d'un cycle décrit par le fluide (ici l'air), et du travail reçu par ce fluide (l'air) au cours de ce même cycle.

### Question 5

Exprimer  $\varepsilon$  en fonction de  $Q_1$  et de  $W$ . Calculer sa valeur.

### PROBLÈME 2 : ÉLECTRICITÉ (3 points)

Une salle de spectacle municipale comprend :

- un dispositif d'éclairage composé de 12 projecteurs, considérés comme purement résistifs, d'une puissance de 1,5kW chacun, commandés par un interrupteur simple.
- un moteur électrique triphasé (couplé en triangle) de puissance utile 18kW, de rendement  $\eta=75\%$  et d'un facteur de puissance de 0,7.

L'alimentation se fait par un réseau triphasé 230/400V-50Hz. On fait l'hypothèse que le réseau est équilibré.

#### Question 1

Dessiner (sans les appareils de protection et d'une manière succincte) le schéma de l'installation.

#### Question 2

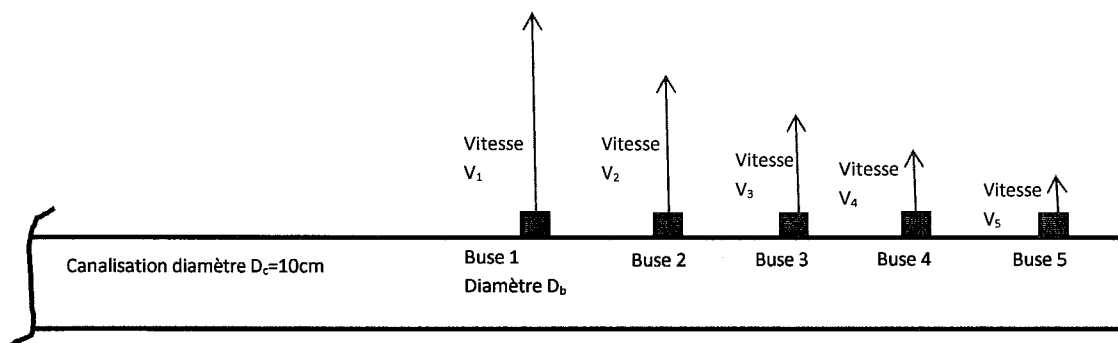
Calculer les puissances actives, réactives et apparentes du dispositif d'éclairage, puis du moteur et enfin de l'installation complète (dispositif d'éclairage + moteur). Présenter les résultats sous forme de tableau ordonné.

#### Question 3

En déduire le facteur de puissance de l'installation. On désire le relever afin de réduire de 30% la puissance réactive de l'installation. Proposer une solution et dimensionner le ou les éléments nécessaire(s) à cette modification.

### PROBLÈME 3 : MÉCANIQUE-HYDRAULIQUE (3 points)

Une installation à base de 5 jets d'eau fonctionnant simultanément est placée sur le parvis d'une mairie (voir figure ci-dessous).



Les 5 jets d'eau atteignent des hauteurs différentes (10m, 8m, 6m, 4m et 2m), considérés comme parfaitement verticaux. L'ensemble est alimenté par une électropompe monophasée branchée sur le réseau (230V-50Hz), de facteur de puissance 0,80 et de rendement optimal 90%. On considère un fonctionnement en ce point nominal et l'intensité du courant absorbé par cette électropompe est de 25A. Elle fournit une pression de 10bars. On néglige les pertes de charge et les frottements sur toute la canalisation. On néglige la résistance de l'air. On prendra comme valeur pour l'accélération de la pesanteur :  $g=10\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ . La canalisation ainsi que les 5 buses ont une forme parfaitement cylindrique.

**Question 1**

Calculer les 5 vitesses à la base des buses :  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$ ,  $V_4$  et  $V_5$

**Question 2**

Calculer le débit volumique (supposé constant) de la pompe en l/mn (litres par minute)

**Question 3**

En déduire le diamètre des buses que l'on considèrera comme identiques.

**Question 4**

Calculer uniquement pour la buse 1, le temps que mettra l'eau pour retomber au sol. Calculer également la vitesse de l'eau au moment de l'impact avec le sol (lors de la retombée).