SUJET NATIONAL POUR L'ENSEMBLE DES CENTRES DE GESTION ORGANISATEURS

CONCOURS INTERNE D'INGENIEUR TERRITORIAL

SESSION 2011

Mathématiques et physique appliquées

Le sujet comporte 5 pages

A LIRE ATTENTIVEMENT AVANT DE TRAITER LE SUJET

Les parties mathématiques et physiques seront composées sur des copies distinctes

Les candidats peuvent traiter les questions dans l'ordre qui leur convient, mais en indiquant le numéro de chaque question.

Si le détail des calculs (justification des résultats) n'apparaît pas sur la copie, les questions qui requièrent des calculs ne seront pas corrigées.

- Vous ne devez faire apparaître aucun signe distinctif dans votre copie, ni votre nom ou un nom fictif, ni signature ou paraphe.

- Le non-respect des règles ci-dessus peut entraîner l'annulation de la copie par le jury.

- Les feuilles de brouillon ne seront en aucun cas prises en compte.

- L'utilisation d'une calculatrice de fonctionnement autonome et sans imprimante est autorisée.

SUJET NATIONAL POUR L'ENSEMBLE DES CENTRES DE GESTION ORGANISATEURS

CONCOURS INTERNE D'INGENIEUR TERRITORIAL

SESSION 2011

Mathématiques et physique appliquées

Durée : 4 heures
Coefficient : 3

MERCI DE COMPOSER LA PARTIE MATHEMATIQUES ET LA PARTIE PHYSIQUE SUR DES COPIES DISTINCTES

Les détails des calculs doivent figurer sur la copie
Aucun résultat approché ne sera accepté
Tout résultat non justifié sera considéré comme nul

MATHEMATIQUES : 10 points

PROBLEME 1 : (5 points)

Soit l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique (e_1 , e_2 , e_3) par la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Question 1 : (0,75 point)

1-a) Soit le vecteur u = (0,1, - 1). Calculer les coordonnées de f (u). Les calculs seront détaillés

1-b) Que peut-on en déduire pour u et le réel 2 ?

Question 2 : (2,5 points)

Si elles existent, on note λ_1, λ_2 et λ_3 les valeurs propres réelles de f rangées par ordre croissant ($\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$).

2-a) Calculer les valeurs propres de f en détaillant les calculs.

2-b) Soit E_1, le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_1. Montrer que E_1 est de dimension 1.

2-c) Donner un vecteur propre v_1 associé à la valeur propre λ_1.

2-d) Expliquer pourquoi A n'est pas diagonalisable.

Question 3 : (1,75 points)

Soit le vecteur $v = (1, 1, -1)$

3-a) Vérifier et justifier que (u, v, e_3) forme une base de $\mathbb{R}^3$. On notera B' cette nouvelle base.

3-b) Calculer les coordonnées de $f(u)$ et $f(v)$ dans La base B'.

3-c) En déduire qu'il existe une matrice inversible M et une matrice triangulaire supérieure T telles que

$A = M^{-1}TM$.
On explicitera M et T.

On rappelle qu'une matrice triangulaire supérieure est telle que tous les éléments situés sous sa diagonale valent 0.

PROBLEME 2 : (5 points)

L'étude d'un phénomène d'amortissement conduit à la résolution de l'équation différentielle :

$$\text{(E)} : y'' + 2y' + 2y = 0$$

où y est une fonction de la variable x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Question 1 : (0,5 point)

Résoudre l'équation (E) sur $\mathbb{R}$.

Question 2 : (0,5 point)

Déterminer la solution y de (E) satisfaisant aux conditions initiales : $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

Question 3 : (2 points)

On considère la fonction f définie sur $[0;\pi]$ par : $f(x) = e^{-x}\sin x$

On note (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Unités : 5 cm en abscisses et 10 cm en ordonnées.

3-a) Vérifier que pour tout réel x de $[0;\pi]$, on a : $\cos x - \sin x = \sqrt{2}\,\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

3-b) Etudier les variations de f sur $[0;\pi]$ et dresser son tableau de variations.

3-c) Ecrire un développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 3.

En déduire l'équation de la tangente (T) à la courbe (Γ) au point d'abscisse 0, et donner la position relative de (T) et de (Γ).

Question 4 : (1 point)

Construire la tangente (T) et la courbe (Γ).

Papier millimétré fourni, à annexer à la copie

Question 5 : (0,5 point)

En utilisant le fait que f est une solution de l'équation différentielle (E), déterminer une primitive

F de f sur $[0;\pi]$.

Question 6 : (0,5 point)

En déduire l'aire en cm^2 du domaine délimité par la courbe (Γ) et l'axe des abscisses.

On donnera la valeur exacte, puis une valeur approchée au mm^2 près par défaut.

PHYSIQUE : 10 points

PROBLEME 1 : (3 points)

ELECTRICITE : Circuit en régime sinusoïdal et compensation

Une tension sinusoïdale de valeur efficace $U = 20$ V et de fréquence $f = 100$ Hz alimente un circuit RLC série ($R = 200\ \Omega$; $L = 0{,}2$ H ; $C = 4\ \mu F$).

Question 1 : (1 point)

Calculer l'impédance du circuit ainsi que le facteur de puissance.

Question 2 : (1 point)

Calculer les puissances active, réactive et apparente.

Question 3 : (1 point)

On désire diminuer la puissance réactive consommée par le circuit par l'ajout d'un condensateur C'.

Comment doit-on brancher C' ?

Calculer la capacité C' pour une diminution de moitié de la puissance réactive.

PROBLEME 2 : (3 points)

HYDRAULIQUE : Etude du rendement d'un barrage

Une des conduites forcée d'un barrage hydraulique, de diamètre $d = 2$m, est reliée à une turbine Pelton. Le point haut du barrage est à une altitude $h1 = 1450$ m et à la pression atmosphérique.

L'entrée de la turbine est à une altitude $h2 = 632$ m et à la pression p2.

Dans tout l'exercice on négligera les pertes de charges.

Question 1 : (0,5 point)

Déterminer la vitesse d'écoulement à l'entrée de la turbine.

Question 2 : (0,5 point)

Calculer la pression à l'entrée de la turbine.

Question 3 : (1,5 points)

A la sortie de la turbine la vitesse de l'eau est négligeable et sa pression est égale à la pression atmosphérique.

1) Calculer l'énergie E fournie à la turbine pour chaque kilogramme d'eau.

2) En déduire la puissance fournie à la turbine.

Question 4 : (0,5 point)

La turbine à un rendement $\rho_{turbine}$ de 0,7. Elle est reliée au réseau électrique par le biais d'un alternateur de rendement $\rho_{alternateur} = 0,92$ et d'un transformateur de rendement $\rho_{transformateur} = 0,95$

Calculer la puissance électrique injectée sur le réseau électrique par le barrage.

Données :
$g = 9,81$ m.s $^{-2}$
masse volumique de l'eau $\rho = 1000$ kg.m^{-3}
pression atmosphérique $p_{atm} = 10^5$ Pa
débit volume en B : 10 000 L.s^{-1}

PROBLEME 3 : (4 points)

MECANIQUE : Trajectoire d'une balle de golf

Un golfeur frappe une balle de golf de masse m, assimilée à une sphère de rayon r, lui communiquant une vitesse initiale $v0$ dans une direction faisant un angle α avec l'horizontale.

Question 1 : (1 point)

Déterminer la forme de la trajectoire du centre d'inertie de la balle en considérant que l'action de l'air est négligeable.

Question 2 : (1 point)

Déterminer la distance entre le golfeur et le point d'impact de la balle (on considérera que le golfeur est au niveau de la balle au moment de l'impact).

Question 3 : (2 points)

Dans une seconde partie du green, le golfeur ne maitrise pas son geste et expédie la balle dans un étang. La balle de golf descend alors verticalement pour atteindre le fond de l'eau. On considèrera que l'eau exerce sur la balle une force de frottement de sens opposé à celui de la vitesse et de valeur f =k.v.

Déterminer l'équation vérifiée par la vitesse de la balle.

Préciser l'expression de v(t), équation horaire de la vitesse de la balle.

Données :
Masse volumique de l'eau $\rho = 1000$ kg.m^{-3}
$m = 50$ g
$v0 = 40$ m.s^{-1}
$\alpha = 40°$
$g = 9,8$ m.s^{-2}
$r = 2$ cm
$k = 7.10^{-2}$ SI